Voici une liste de quelques exercices destinés à donner un aperçu du contenu de l'épreuve écrite d'admission sur titre et d'admission d'apprentis. Cette liste n'est qu'indicative et il est rappelé aux futurs candidats que l'épreuve se déroule en temps limité (2 heures) sans documents et sans calculatrice. Dans cette épreuve, dont la finalité est de s'assurer que les candidats dominent les notions du programme proposé, il est tenu le plus grand compte de la précision et de la rigueur des explications.

Nous rappelons aussi que cette épreuve écrite n'est que la première étape du recrutement et que l'admission définitive est prononcée à l'issue de l'entretien oral au cours duquel sera, en particulier, évalué la motivation et le projet personnel du candidat.

Vous trouverez aussi, à la fin, un exemple d'épreuve complète.

ANALYSE

1. Déterminer, en justifiant vos réponses, les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2\right)-\sqrt{x}$

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(2x^2)}{x\sin x}$

2. Calculer les intégrales suivantes.

   a) $\displaystyle\int_0^1 x\cos\left(3x^2-5\right)\,dx$

   b) $\displaystyle\int_1^2 t\ln t\,dt$

   c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^4}\,dt$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $y'+(\sin x)\,y=\sin x$.

4. Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle suivante : $y'+(\tan x)\,y=\sin(2x)$.

5. On considère la fonction f suivante : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2y\,e^{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$

   Calculer : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(1,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,1)$.

6. Parmi les réponses a), b) et c) donnez, en justifiant, celles qui sont correctes :

   On considère la fonction f définie par : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+\ln x \end{array}$.

   a) Pour tout entier naturel n l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b) La fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+^*$.

   c) La fonction f est minorée sur $\mathbb{R}_+^*$.

ALGÈBRE

1. Déterminer le module et la partie imaginaire du nombre complexe suivant :

$$Z = e^{i\frac{\pi}{3}}\,(1+i)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 + z + 2 = 1$.

3. On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer A^2.

   b) La matrice A est-elle inversible ? (Justifier).

   c) La matrice A admet-elle zéro comme valeur propre ? (Justifier).

4. On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Déterminer les valeurs propres de A. (Justifier)

   b) La matrice A est-elle diagonalisable ? (Justifier).

   c) La matrice A est-elle inversible ? (Justifier).

5. On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

   a) Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

   b) La matrice A est-elle diagonalisable ? On donnera les justifications nécessaires.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

1. Dans une classe 30 élèves étudient l'anglais et 17 l'allemand.
   Sachant que tous les élèves étudient au moins l'une des deux langues : l'anglais ou l'allemand, et qu'il y a 11 élèves qui étudient à la fois l'anglais et l'allemand quel est l'effectif de la classe ?

2. Dans un groupe de N personnes 40 % sont des hommes et les trois quarts d'entre eux portent des lunettes.
   Dans ce groupe combien y-a-t-il d'hommes portant des lunettes ?

3. Quelle est la négation de la propriété suivante : « Tous les éléments de l'ensemble E sont des réels différents de zéro » ?

4. Combien y-a-t-il de matrices carrées d'ordre 6 (6 lignes et 6 colonnes) dont tous les coefficients appartiennent à l'ensemble $\{0, 1\}$?

PHYSIQUE

1. Calculer la vitesse et l'accélération périphériques d'une fraise de dentiste de 2 mm de diamètre tournant à une vitesse de 300 000 tours par minute.

2. Un palet de curling dont la masse m vaut 20 kg est lancé sur une piste de glace horizontale, avec une vitesse $v_L = 2,1$ m.s^{-1}. Le palet se déplace en ligne droite et atteint son but situé à 40 m du point de lancement avec une vitesse quasiment nulle.

   a) Calculer le travail de la force de frottement $\overrightarrow{F}$ (supposée constante durant le parcours).

   b) Déterminer la valeur de cette force $\overrightarrow{F}$.

3. On attache à un ressort vertical, de raideur k et de longueur au repos l_0, un point matériel M de masse m. Ce point matériel se trouve à l'équilibre en O (origine de l'axe vertical descendant Ox). À $t = 0$ on déplace la masse ponctuelle M d'une longueur x_0 vers le bas et on la lâche sans lui communiquer de vitesse initiale.

   a) Faire une figure.

   b) Exprimer l'allongement x (à partir de la position O) en fonction du temps t.

4. Un satellite artificiel en rotation autour de la terre effectue un tour en 1 h 30 min. Le rayon de l'orbite vaut 6680 km.
   En précisant les hypothèses faites :

   a) Déterminer sa vitesse angulaire ω.

   b) Calculer sa vitesse v.

5. Un bateau se déplace sur un plan d'eau, à l'instant $t = 0$ il a une vitesse v_0 ; on coupe les moteurs. Le bateau est alors soumis à des forces de frottement proportionnelles à sa vitesse.

   Déterminer l'équation du mouvement du bateau

6. Une éprouvette contient du mercure sur une hauteur de 10 centimètres.

   a) Quelle est la différence des pressions entre les niveaux inférieur et supérieur ?

   b) Quelle serait la différence d'altitude de deux points d'un récipient rempli d'alcool entre les lesquels on aurait la même différence de pression ?

   Masse volumique du mercure : 13600 kg/m^3.
   Masse volumique de l'alcool : 800 kg/m^3.

7. Selon le modèle de l'Atmosphère Standard International (A.S.I.), on admet que dans la troposphère (entre 0 et 11 km d'altitude) la température T varie avec l'altitude z selon une loi de la forme :

   $$T = T_0 + Az, \text{ où } T_0 \text{ est la température au sol et } A \text{ est une constante négative.}$$

   L'air est assimilé à un gaz parfait ($M = 29{,}0$ g $\cdot$ mol^{-1}).
   Déterminer la pression $P(z)$ à l'altitude z.

8. Un caisson flottant ayant la forme d'un parallélépipède rectangle a une base de 10 m sur 4 m et une hauteur de 5 m. Ce caisson pèse 54 tonnes à vide et flotte sur un bassin d'eau douce.

   a) Quelle est la hauteur de la partie du caisson qui est hors de l'eau ?

   b) Le fond du bassin est plat et le bassin a une profondeur de 5 m ; quelle masse de pierres faut-il placer dans le caisson pour le faire reposer sur le fond ? On néglige la variation du niveau de l' eau dans le bassin.

Durée : 2 heures Sans documents et sans calculette

NOM :

PRÉNOM :

Les candidats répondront aux questions directement sur les feuilles distribuées, en donnant des explications précises. Le questionnaire comporte cinq feuilles.

PARTIE 1

1. On imagine l'expérience suivante : une corde est tendue sur le pourtour de la terre, supposée sphérique, à même le sol, dans un plan passant par le centre de la terre. On rajoute ensuite 1 m supplémentaire de corde et la nouvelle corde est disposée de manière circulaire de telle sorte que le centre coïncide avec celui de la terre.
   De combien la corde s'est-elle élevée du sol ?
   Étudier le même problème avec un ballon de football.

2. Votre poids est de 800 N ; vous êtes dans un ascenseur en phase d'accélération ascendante.
   Votre poids diminue-t-il ? augmente-t-il ? reste-t-il le même ? (Justifier)

3. Quelle est la négation de la propriété suivante : « Il existe au moins un élève de la promotion qui porte des lunettes » ?

PARTIE 2

1. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant : $Z = \dfrac{3-2i}{(i-1)\,e^{i\frac{\pi}{2}}}$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $y'' + 2y' - 3y = 0$.

3. Calculer la dérivée de la fonction suivante : $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left(1+x^2\right)^x \end{array}$

PARTIE 3

Déterminer, en justifiant vos réponses, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\ln\left(\frac{1}{2x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2+x-6}$

3. $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$

PARTIE 4

Calculer les intégrales suivantes.

1. $$\int_0^1 \left(1+\tan^2 x\right)\ \tan^3 x \, dx$$

2. $$\int_1^2 t \sin t \cos t \ dt$$

3. $$\int_0^{+\infty} t\, e^{-t^2}\ dt$$

PARTIE 5

Combien y-a-t-il de matrices carrées d'ordre 8 (8 lignes et 8 colonnes) formées de 3 colonnes ne contenant que des 1, les autres colonnes ne contenant que des 0 ?

PARTIE 6

On considère la matrice suivante : $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2.

2. Montrer que la matrice A est de rang 2.

3. La matrice A est-elle inversible ? (Justifier).

PARTIE 7

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante : $x\,y' - y = x^2\,\cos x$.

PARTIE 8

À quelle condition un corps solide de masse volumique ρ_s flotte-t-il sur un liquide de masse volumique ρ_l ?
On expliquera la démarche en précisant les hypothèses faites.

PARTIE 9

On accroche une bille de masse $m = 200$ g au bout d'un fil de masse négligeable et de longueur $l = 1$ m. Le fil étant tendu, on lâche la bille avec une vitesse nulle dans une position initiale faisant un angle $\theta_0 = 15°$ avec la verticale. Quelle est sa vitesse lors de son passage par la position verticale ?

PARTIE 10

On laisse tomber, sans vitesse initiale, d'une hauteur $h = 2$ m, une bille B métallique de masse $m = 0{,}700$ kg. Cette bille est assimilée à un point matériel soumis à l'action du champ de pesanteur terrestre (on prendra $g = 9{,}81$ m.s^{-2}). On admet qu'il existe une force de frottement visqueux proportionnelle à la vitesse : $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$, où α est un coefficient (de frottement) positif.

1. Faire une figure en orientant la verticale vers le bas.
2. Quelle est l'unité du coefficient α ?
3. Déterminer la vitesse $v(t)$ de la bille en faisant intervenir le paramètre $\tau = \dfrac{m}{\alpha}$.
4. Trouver l'équation horaire $x(t)$ du mouvement.